Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 6

Description d'un fluide en écoulement stationnaire – TD

Exercice 1 : Débit de la Loire

Le débit volumique moyen de la Loire au niveau d'Orléans est $D_\mathrm{V} = 400\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$, avec une vitesse moyenne $v = 1\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

1. Déterminer le débit massique moyen.

2. Sachant que la profondeur moyenne du fleuve est $h = 2\,\mathrm{m}$, estimer sa largeur moyenne L au niveau d'Orléans.

Exercice 2 : Modélisation de la houle

On peut modéliser la houle qui se propage à la surface de la mer selon l'axe x par un champ de vitesse :

$$\vec{v}(x,z,t) = V_0\,\mathrm{e}^{k\,z}\left[\cos\left(k\,x - \omega\,t\right)\vec{e}_x + \sin\left(k\,x - \omega\,t\right)\vec{e}_z\right]$$

avec z l'axe vertical ascendant dont l'origine correspond au niveau moyen de la mer, ω la pulsation de l'onde, et $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde.

1. Représenter l'allure du champ de vitesse à l'instant $t = 0$ dans les plans $x = 0$, $x = \dfrac{\lambda}{4}$ et $x = \dfrac{\lambda}{2}$.

On peut montrer qu'un écoulement est incompressible s'il vérifie la relation :

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0.$$

2. Cet écoulement est-il incompressible ?

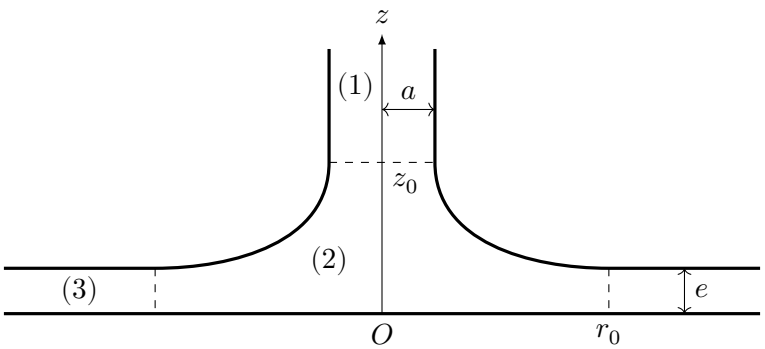
3. Calculer la vorticité de l'écoulement qui est définie telle que :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}.$$

Exercice 3 : Canalisation à symétrie cylindrique

On considère un écoulement d'air dans une canalisation à symétrie cylindrique d'axe (Oz) constituée de 3 parties :

- un tuyau vertical cylindrique (1) de rayon a et d'axe (Oz) ;
- une jonction (2) de hauteur z_0 et de largeur r_0 ;
- un espace (3) entre deux plaques horizontales espacées d'une distance e.



On suppose que l'air est un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible. En supposant également que $a \ll z_0$ et $e \ll r_0$, le champ des vitesses peut s'exprimer en coordonnées cylindriques :

- $\vec{v}_1 = -v_0\,\vec{e}_z$ dans la partie (1) avec v_0 une constante positive ;

- $\vec{v}_2 = A\,r\,\vec{e}_r + B\,z\,\vec{e}_z$ dans la partie (2) avec A et B des constantes ;
- $\vec{v}_3 = v_3(r)\,\vec{e}_r$ dans la partie (3).

On s'intéresse tout d'abord à l'écoulement dans la partie (1).

1. Exprimer le débit volumique à travers une section du tuyau.

On s'intéresse maintenant à l'écoulement dans la partie (3).

2. Exprimer le débit volumique à travers une section où r est constant en fonction de e, r et $v_3(r)$.

3. En déduire l'expression de $v_3(r)$.

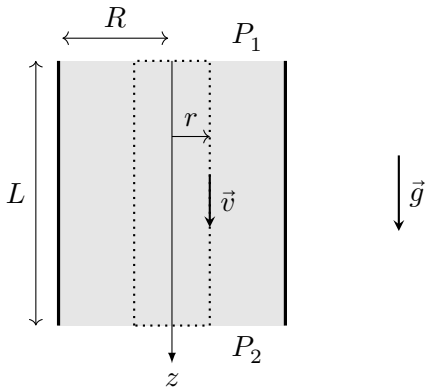
On s'intéresse enfin à l'écoulement dans la partie (2).

4. La vitesse étant continue entre les différentes parties, déterminer l'expression des constantes A et B.

5. En déduire l'expression de $\vec{v}_2$.

Exercice 4 : Écoulement de Poiseuille dans une conduite verticale

On considère un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η en écoulement stationnaire dans une conduite cylindrique verticale d'axe descendant (Oz) de rayon R et de longueur L. On note P_1 la pression en haut de la conduite et P_2 la pression en bas de la conduite, avec $P_1 > P_2$. On suppose que le champ de vitesse du fluide s'écrit sous la forme $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_z$.



Le système étudié est le cylindre de rayon r et de longueur L, représenté en pointillés sur la figure ci-dessus. Il est soumis à une force surfacique de viscosité dont la norme s'exprime :

$$f_\mathrm{s} = \eta \left| \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right|.$$

1. Quelle est la vitesse du fluide en contact avec la paroi de la conduite ? En déduire le signe de $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$.

2. Sachant que la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le système étudié est nulle pour cet écoulement stationnaire, déterminer l'expression de $v(r)$.

3. Représenter le profil de vitesse dans la conduite.

4. Déterminer l'expression du débit volumique D_V à travers une section de la conduite.

Exercice 5 : Mesure de la viscosité dynamique d'un fluide

Un récipient cylindrique vertical de diamètre $D = 50\,\mathrm{mm}$ est rempli d'un fluide visqueux et incompressible de masse volumique $\rho = 1{,}0\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Il se vide progressivement à travers un tube horizontal de diamètre $d = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L = 40\,\mathrm{cm}$ relié à sa base. On admet que le débit volumique dans le tube vérifie la loi de Poiseuille :

$$D_\mathrm{V} = \frac{\pi\, d^4}{128\,\eta}\,\frac{\Delta P}{L}$$

avec ΔP la différence de pression entre les deux extrémités du tube, et η la viscosité dynamique du fluide.

1. Sachant que le récipient s'est vidé de moitié en 38 min, déterminer la viscosité dynamique du fluide.